

## Leçon 101

Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

### I - Actions de groupes

### II - Etude de groupes via les actions

### III - Etude d'ensembles via les actions

Dev 1 : Théorèmes de Sylow

Dev 2 : Dénombrement des matrices diagonalisables de  $M_n(\mathbb{F}_q)$

### I - Actions de groupes

1) Définitions : def action, orbites, stab, action transitive/fidèle/libre, exemples

2) Propriétés dans le cas fini : formule des classes, Burnside, app : Cauchy [Ber18]

3) Actions par translation et par conjugaison : def centralisateur/centre, propriétés, Cayley, normalisateur [Ulm12]

### II - Etude de groupes via les actions

1) Théorèmes de Sylow : def et props  $p$ -groupes (centre, classification ordre  $p^2$ ),  $p$ -Sylow, dev 1 [Ber18], [Ulm12]

2) Groupes symétriques : def, cycles, types, décomposition en cycles à supp disjoints, app : calcul d'invariants (signature, ordre), conjugaison, transitivité, automorphismes [Ulm12]

3) Groupes projectifs : isos exceptionnels [CG17]

4) Représentations de groupes : def, irréductibles, Mashke, Schur, tables de caractères, action sur le tétraèdre, table de  $\mathfrak{S}_4$  [CG18]

### III- Etude d'ensembles via les actions

1) Action par équivalence : def, orbites, invariant, forme normale [Rom21]/[CG17]

2) Action par conjugaison : def, orbites, invariant, forme normale, dev 2 [Rom21]/[CG17]

3) Action par congruence : def, orbites, invariant, forme normale, lien formes quadratiques [Rom21]

## Références

- [Ber18] Grégory BERHUY. *Algèbre : Le grand combat*. Calvage & Mounet, 2018.
- [CG17] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*. Calvage & Mounet, 2017.
- [CG18] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome Second*. Calvage & Mounet, 2018.
- [Rom21] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck supérieur, 2021.
- [Ulm12] Félix ULMER. *Théorie des groupes*. Ellipses, 2012.